4^{eme} **M** | **Devoir de synthèse n°1** | Durée :3H

<u>EXERCICEN°1</u>

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On donne les points A , B et C d'affixes respectives 1 , i , 2 + i .

1/ Soit r la rotation de centre A qui transforme C en B.
Déterminer la transformation complexe associée à r .

2/ A tout point M d'affixe z , $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{-1, i\}$, on associe le point M' d'affixe z'
tel que $z' = \dfrac{1}{z^2}$.

a) Démontrer que r (M) = M' si et seulement si $iz^3 + (1-i)z^2 - 1 = 0$ (E)

b) Résoudre l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution réelle.

3/ a) Montrer que le triangle AMM' est rectangle en A si et seulement si
$\dfrac{z+1}{z^2}$ est imaginaire pur non nul .

b) On pose $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in \left]0, \pi\right[$.
Exprimer $\dfrac{z+1}{z^2}$ sous forme trigonométrique et en déduire la valeur de θ
Pour laquelle AMM' est rectangle en A.

4/ Soit N le point du plan d'affixe $z_N = \dfrac{(1+i)z}{z-i}$ où $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{i\}$.

a) Montrer que lorsque N appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon 1,
M appartient à une droite D qu'on précisera.

b) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}) \equiv \dfrac{\pi}{4} - (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}})\ [2\pi]$. En déduire l'ensemble Δ des points M
pour lesquels O , M et N sont alignés.

<u>EXERCICE N°2</u>

Soit f la fonction définie sur]0 , 1] par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}$.

1/ a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1.
b) Montrer que f est dérivable sur]0 , 1[et calculer f ' (x).

2/ a) Montrer que f est une bijection de]0 , 1] sur $\mathbb{R}_+$. Soit f^{-1} sa fonction réciproque .

b) f^{-1} est-elle dérivable à droite en 0 ?

c) Construire , dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes représentatives
$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de f et de f^{-1} respectivement .

d) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

3/ Pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ on pose $g(x) = f\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$.

a) Montrer que Pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ $g(x) = \sqrt{2\operatorname{cotg} x}$. (on donne $\operatorname{tg} 2a = \dfrac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}$)

b) Etudier la dérivabilité de g à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$.

c) Montrer que g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer g' (x) .

4/ Montrer que g réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $\mathbb{R}_+$. Soit g^{-1} sa fonction réciproque.

5/ Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ puis calculer $\left(g^{-1}\right)'(x)$.

6/ On pose pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ $h(x) = g^{-1}(\sqrt{2x}) + g^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)$.

a) Calculer $g^{-1}(\sqrt{2})$.

b) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer h' (x).

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ $h(x) = \frac{\pi}{2}$.